導論

前言：

大學教育不僅傳授專業知識，也著重於培養良好的實驗態度與習慣。在實驗課所提供的學習機會裡，同學們不但可以親手獲得第一手知識，也學到如何正確地使用儀器，鍛鍊出一雙靈巧的手，體驗本身能力以及發揮器材效用，這是一種寶貴的經驗。

「求真」是科學的美德，在實驗室裡清楚地知道自己在做什麼、忠實地記錄下所有的原始數據與結果，這就是求真。我們固然重視實驗結果的合理與否，但更重要的是對問題的了解、對問題的透視以及分析能力上的訓練。實驗做完後要能知道什麼樣的原因會造成這樣的結果：如果結果對了，要能知道為什麼會對；如果錯了，要有能力判斷出問題的癥結，看出影響的嚴重性如何，分析出解決困難的途徑……等等，這些功力都將成為各位日後發展的本錢，也是實驗課的訓練目的。一位了解為什麼做出重力加速度 $g = 10.0$ m/s^2 並知道如何改進的學生，比起另一位不知道為什麼做出 $g = 9.8$ m/s^2 的學生要來得有收穫。

以眾所周知的庫倫定律(Coulomb's law)為例，根據 David K. Cheng 所著 Field and Wave Electromagnetics (2/e)其原文嚴密敘述為：「The force between two charged bodies, q_1 and q_2 and, that are very small in comparison with the distance of separation, R$_{12}$, is proportional to the product of the charges and inversely proportional to the square of the distance, the direction of the force being along the line connecting the charges.」 以數學式表示則為：

$$\vec{F}_{12} = \hat{a}_{R_{12}} k \frac{q_1 q_2}{{R_{12}}^2}$$

儘管庫倫定律最初是由實驗所得出來的結果，我們不禁有個疑問：帶電物體到底要小到什麼地步才算是「very small in comparison with the distance of separation」? 首先，我們要知道點電荷僅是理想化的假設，就跟質點一樣，在現實世界裡是不存在的。當帶電體大小給定時，將距離拉遠是可用近似來表示 「very small in comparison with the distance of separation」，如此一來新的問題產生了。當距離拉得太遠可能導致庫倫力非常微弱，以至於很容易受到外界影響，使得實驗結果更不準確，更何況是在實驗室有限空間裡也不容許我們將距離拉得很遠，做實驗以及設計實驗的人總是在各個現實條件下找尋一個最佳化的狀態。因此，實驗的不準度是永遠無法完全避免的。

就因為不準確，實驗就一文不值了嗎? 非也。實驗是檢驗真理的必要方式，即便理論說得再漂亮、再天衣無縫，要是禁不起實驗的考驗，它仍舊會被摒棄。 當實驗有誤差時，該如何去克服呢？以「謹慎」的態度、多次「練習」藉以提昇實驗技巧，永遠是做好實驗的不二法門。

以下提供幾項做實驗「求真」的基本觀念：

1. 所有測量值都要毫不改變地記錄下來，且不要再有任何的更改或謄錄以降低筆誤甚至被懷疑捏造數據的機會。即使出現了筆誤，就在該數據上畫上橫槓，不可塗改或是修飾。記住，留下所有原始資料，即使它是錯的。
2. 養成將實驗數據以表格形式記錄下來。記住，所有物理量皆應附單位。
3. 單一次測量在實驗上價值不大，因為它可能包含了相當大的誤差而不自知，甚至根本就是錯的。準確起見，盡可能對可測量的物理量做五次以上的測量。

物理量單位：

以國際度量單位 SI. (M.K.S.)為準，數字與單位間應加上一個空格：如 3 kg、4 V、5 m....等等。

採用人名的單位時若欲全寫則必須全為小寫字母，若為簡寫則其第一個字母須大寫，例如：

Newton (人名) → newton (單位) → N (單位)
Hertz (人名) → hertz (單位) → Hz (單位)
Ampere (人名) → ampere (單位) → A (單位)

非採用人名之單位則無論是全寫或簡寫均以小寫字母表示：
例如：

meter＝m，hour＝hr，second＝s；但 liter＝l＝L 是唯一的例外。

在任何的實驗觀測中，即使採用非常精密的測量儀器也不可能得到絕對精確的實驗結果。此時，便衍生出估計值、有效數字、誤差等觀念。

科學記號：

由阿基米德所提出，科學記號是一種記數的方式由阿基米德所提出。當實驗數據位數過多時，為方便記錄會將實驗數據簡化以科學記號表示。

科學記號是將一個數寫成 1 到 10 間的實數與 10 冪次方的乘積，以 $a\times10^{n}$ 表示。在電腦或計算機中通常以「EXP」或「E」來表示 10 的冪次方。

[例 1]　1.632E-19　即　1.632×10^{-19}
[例 2]　3.00E8　即　3.00×10^{8}

有效數字：

有效數字定義為準確值再加上一位估計值，而估計值為準確值下一位數。

對於長度物理量的表示法可用 2.376×10－4 km、0.0002376 km、0.2376 m、23.76 cm、237.6 mm、237600 m、……等。上述所有表示法僅單位不同但有效位數都是四位，乍看來很唬人的「零」都只是用來表示小數點的位置而已，並不影響有效數字的位數。

假如有效數字中的「零」不是用來標明小數點的位置，則這些「零」跟所有「不是零」的數字一樣都是有效數字。例如：0.50006，34.209 都是五位有效數字。

「零」的規則如下：

1. 第一位數之前的「零」一律不算有效數字。
2. 第一位與末位之間所有的「零」均為有效數字。
3. 末位數之後的「零」若為估計值則為有效數字。

A. 四則運算法

(a) 加減法則

有單位者應化成相同單位再進行運算。計算結果以計算前小數點後位數最少者為準，其餘捨去。

[例 1]　49.57 +2903.4050 +9.679 +5.08 =2967.7340 → 2967.73

[例 2]　123.579-12.41=111.169 → 111.17

(b) 乘除與開根號法則

有單位者應化成相同單位再進行運算。計算結果以計算前有效位數最少者為準，其餘捨去。

[例 1]　$9500635 \times 0.58 = 5510368.30 \rightarrow 5500000 = 5.\underline{5} \times 10^{6}$

[例 2]　$36.94 \times 28.55 = 1054.6370 \rightarrow 1055$

[例 3]　$9357.9\underline{8} \div 50\underline{8} = 18.\underline{421} \rightarrow 18.4$

B. 四捨六入法

在進行大量數據運算時，因四捨五入法，逢五就進位，容易導至誤差均值偏高，因此會改採用四捨六入進行運算，使總體誤差均值較低且趨近於零。規則如下：

1. 估計值(底線)下一位數大於或等於 6 時，進位。

   [例]　30.29 → 30.3

2. 估計值(底線)下一位數小於或等於 4 時，不進位。

   [例]　30.24 → 30.2

3. 估計值(底線)下一位數為 5 時，再往下看一位數，再決定是否進位。

(a) 往下一位數為 1-9 時進位。

[例] 30.256 → 30.3

(b) 往下一位數為 0 時，應由估計值判斷是否進位，「遇偶便捨，逢奇則入」。

✧ 當估計值為奇數時，進位。

[例] 30.350 → 30.4

✧ 當估計值為偶數時，不進位。

[例] 30.850 → 30.8

誤差表示：

實驗中所有的測量值皆非絕對準確。即使是由同一個人以同一套系統操做重覆實驗也常會得出不完全相同的結果，可見每一次實驗都難免會產生誤差。為了將誤差降到最低，我們必須先分析出導致誤差的原因才能對症下藥。

誤差來源一般分成系統誤差、人為誤差及隨機誤差三大類：

A. 系統誤差

(a) 設備上缺陷所造成：例如儀器設計不良或機械零件精度不夠、刻度不準，甚至磨損與老化，都可能造成實驗結果不可靠。解決辦法有：針對特定的測量工作要特別選擇適用的器材，按照標準程序對儀器作校正。上述方法均無效後，可嘗試找出修正公式，用來將原測量值換算成正確的數據。

(b) 環境所造成：例如實驗室溫度突然改變將導致米尺的熱脹冷縮，解決的方法可在實驗室裝設恆溫的空調；又比方說，有些電磁輻射會對一些電子儀器造成干擾，所以在設計或採購儀器時可加上「防電磁輻射」的功能設計。

(c) 理論誤差與實驗方法誤差：因為理論不夠嚴密或實驗方法採取不當的近似所導致。

B. 隨機誤差

任何系統的物理狀態都具有統計上的不確定性，且此誤差是物理的本質之一，也是永遠存在而無法避免的。唯一應付之道便是增加實驗次數，再以統計學的理論來處理數據以獲得較佳的結果。

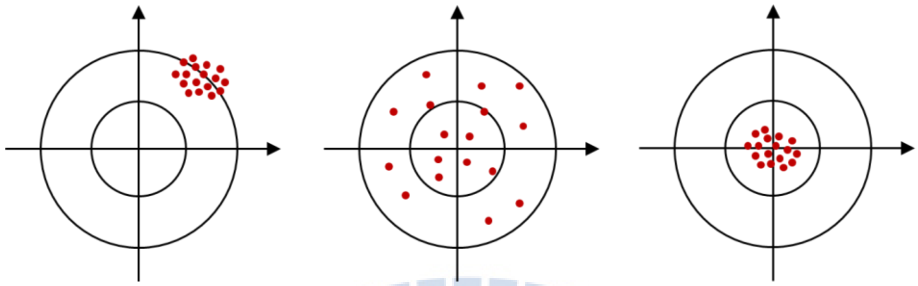
C. 人為誤差

多半為個人疏忽所造成。例如數據的判讀有誤、實驗前忘了校正、記錄數據時的筆誤，或是計算錯誤等。解決的辦法為多做幾次重覆的實驗，以便挑出離譜數據並捨棄之，以及平常便養成細心的習慣等等。

記住，當在整套實驗數據裡找到一個錯誤時，只有「劃去不用」或「實驗重做一遍」兩條路，千萬不可修飾它，也不可只單獨重取該數據，因為這個新取的數據已不屬於原來的那套數據的一部分。此外，人的感官或不良習慣也是造成此類誤差的原因。

測量，有本質上的極限。我們必須認知的是：數量、物理公式、甚至經驗方程式……等等並「不等於」其所描述的那件現象本身。我們只是「人為嘗試著去形容它」罷了。以下，我們將探討如何藉由統計上的方法來詮釋數據。

數據表示：



(a) (b) (c)

圖一　精確度示意圖

要完整而精確地表示出一個實驗所量測到的物理量，必須包含以下三者：數量、精確度以及單位。

A. **數量**：除物理上以定義的真值(例:$c = 3.00 \times 10^8$ m/s、$e = 6.02 \times 10^{-19}$ C ……等)或數學常數(如: R、e ……等)外，皆應以有效數字及科學記號($a.bc \times 10^n$)來表示。

B. **精確度**：通常以加減型式表示。可再細分為精度，確度以及精確度三大類。

(a) **精度** – 觀察實驗數據密集程度，用以反映隨機誤差。當實驗數據越集中，即表示隨機誤差較小，實驗精度越高。

(b) **確度** –觀察實驗數據於實際值偏差程度，用以反映系統誤差。當實驗數據與真值偏差越小，即表示系統誤差較小，實驗確度越高。

(c) **精確度** – 系統與隨機誤差的綜合性指標。當實驗數據越集中且實驗數據與真值偏差越小，即表示實驗準確度越高。

統計分析：

統計分析常用於分析數據，是一種清晰明瞭且具有說服力的工具。即以相同儀器測量相同待測物 n 次時，應將實驗結果加以整理表示。

A. 算術平均數

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

平均數並非真正的值，亦不表示其最可能值，我們只能說它「具代表性」。

B. 偏差 (有正負之分)

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

C. 平均偏差

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} |d_i|}{n}$$

D. 百分誤差

$$\frac{D}{\bar{x}} \times 100\%$$

E. 標準差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2}{n-1}}$$

當實驗數據量夠多(理想情況是$n \to \infty$)時，數據將成常態分佈。根據某一數值距離平均值多少個標準差可得知：從「平均值到該值之間的數據個數」佔「總個數」的百分比。根據理論計算的結果，在平均值上下一個標準差範圍內的個數佔總個數的 68.3%；兩個標準差範圍內的個數佔 95.4%；三個標準差範圍內的個數佔 99.7%。因此，當我們看到一段描述「質量 127 公克，標準差 2 公克」時必須知道「約有將近七成的測量數據是在 125 到 129 公克間」。

F. 平均標準差

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^{\ 2}}{n(n-1)}}$$

在有限次數測量下，所計算的平均值其實只是實際值的一個估計，平均標準差可以做為平均值與實際值差距的不準度參考，越小代表平均值越接近實際值的機率越高。測量次數的增加並不會影響每次測量的可能誤差，可是平均值卻可以抵消隨機誤差而使實驗結果越接近實際值。亦即，標準差並不會隨著測量次數減少，而平均標準差卻會隨著測量次數減少。

平均標準差嚴格定義為對一個測量對象取了 n 個數據 (n 是有限值)，用這 n 個數據可得出一個平均值 $\overline{a_1}$。再以這 n 個數據為一組，重覆取無限多組，則每一組將各有其平均值 $\overline{a_i}$，於是我們得到了無限多個 $\overline{a_i}$ (它們也將成常態分佈)。而這無限多個 $\overline{a_i}$ 的標準差就是我們所定義的平均標準差。從另一個角度來看，對一個實驗操作九次測量所獲得的平均值，其可靠性為單一測量時的三倍。這種工作冗繁無比，但我們無需這樣做，只要利用統計理論，就可以從一組 n 個量度的標準差 σ 算出平均標準差 σ_x。

G. 相關係數

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

$\gamma = 0$	零相關
$0.0 < \gamma < 0.3$	低度相關
$0.3 < \gamma < 0.7$	中度相關
$0.7 < \gamma < 1.0$	高度相關
$\gamma = 1$	完全相關

H. 實驗結果

所有實驗結果應記錄為 $\bar{x} \pm \sigma_x$，並附上單位。

誤差傳遞：

兩組以上的實驗結果進行四則運算時，皆應考慮誤差傳遞。

令 $x=\bar{x}\pm\sigma_x$ 且 $y=\bar{y}\pm\sigma_y$

A. 加減法的誤差傳遞

$$\overline{x\pm y}=\bar{x}\pm\bar{y}$$

$$\sigma_{x+y}^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2$$

$$x\pm y=\left(\bar{x}\pm\bar{y}\right)\pm\sigma_{x+y}$$

$$\sigma_{x+y}=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$$

一般式(通式)可表示為：

$$\sigma_N{}^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$$

B. 乘除法的誤差傳遞

(a) 乘法

$$x\times y=\overline{xy}\pm\sigma_{xy}$$

$$\overline{xy}=\bar{x}\times\bar{y}$$

$$\sigma_{xy}=\sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\right)^2\right]}\times\left(\bar{x}\times\bar{y}\right)$$

(b) 除法

$$\frac{x}{y}=\left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right)\pm\sigma_{\frac{x}{y}}$$

$$\overline{\frac{x}{y}}=\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

$$\sigma_{\frac{x}{y}}=\sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\right)^2\right]}\times\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

一般式(通式)可表示為：

$$\left(\frac{\sigma_N}{y}\right)^2=\left(\frac{\sigma_1}{y_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{y_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\sigma_n}{y_n}\right)^2$$

其中 y 為導出量的平均值；y_1、y_2、…、y_n 為乘除計算中每一個物理量的平均值。

C. 冪次運算的誤差傳遞

$$x^l\times y^m=(\bar{x}^l\times\bar{y}^m)\pm\sigma_{x^l y^m}$$

$$\overline{x^l\times y^m}=(\bar{x}^l\times\bar{y}^m)$$

$$\left(\frac{\sigma_{x^l y^m}}{\bar{x}^l\times\bar{y}^m}\right)^2=l^2\left(\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2+m^2\left(\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\right)^2$$

D. 一般情況下平均標準差的誤差傳遞

令 $N=f(x,y)$，則

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2}$$

最小平方法迴歸分析：

這是一種常用的分析工具，經由計算求得一條最佳逼近曲線，使所有的數據到此線的鉛垂方向距離平方之總和為最小。
設 n 個實驗數據：

$$(x_i, y_i)\text{，}i = 1,2,3,\ldots n$$

簡而言之，線性迴歸分析即為利用數學或統計的方法取得最佳曲線用以解釋過去與預測未來。

A. 線性迴歸 (linear regression)

若其最佳曲線函數型式為 $y = f(x) = Ax + B$，其中 A 與 B 均為未知參數，則所有數據到此線的鉛垂方向距離平方和，表示如下

$$D(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i) - y_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[Ax_i + B - y_i\right]^2$$

所謂最佳化就是使 $D(A,B)$ 為最小，則

$$\frac{\partial D}{\partial A} = 0\text{；}\frac{\partial D}{\partial B} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial A} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial A}\left[Ax_i + B - y_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}2\left[Ax_i + B - y_i\right]x_i \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\left[Ax_i^2 + Bx_i - x_i y_i\right] = 2\left[A\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + B\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial B} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial B}\left[Ax_i + B - y_i\right]^2 = 2\left[\sum_{i=1}^{n}Ax_i + \sum_{i=1}^{n}B - \sum_{i=1}^{n}y_i\right] \\ &= 2\left[A\sum_{i=1}^{n}x_i + nB - \sum_{i=1}^{n}y_i\right] = 0\end{aligned}$$

解得

$$A = \frac{n\left[\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right] - \left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}y_i\right]}{n\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}\right] - \left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]^2}\text{；}B = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}y_i\right] - A\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]}{n}$$

在很多工程用計算機裡頭都有計算 A 與 B 的功能，我們只須輸入(x_i, y_i)便可輕易得出 A 與 B，不須如上作繁雜的計算。試算表軟體(如 MS-Excel)亦可求出迴歸(趨勢)線。

B. 指數迴歸 (exponential regression)

用來描述實驗數據的函數型式為 $y = A \times e^{Bx}$ 者，也可以用計算機或試算表軟體求得其迴歸曲線的參數。

C. 對數迴歸 (logarithmic regression)

用來描述實驗數據的函數型式為 $y = A \times \ln x + B$ 者，也可以用計算機或試算表軟體求得其迴歸曲線的參數。

D. 乘冪迴歸 (power regression)

用來描述實驗數據的函數型式為 $y = A \times x^B$ 者，也可以用計算機或試算表軟體求得其迴歸曲線的參數。