

實驗一 空氣熱容比的測定

實驗目的：

以 Ruchhardt 實驗法，測量空氣熱容比 γ 。

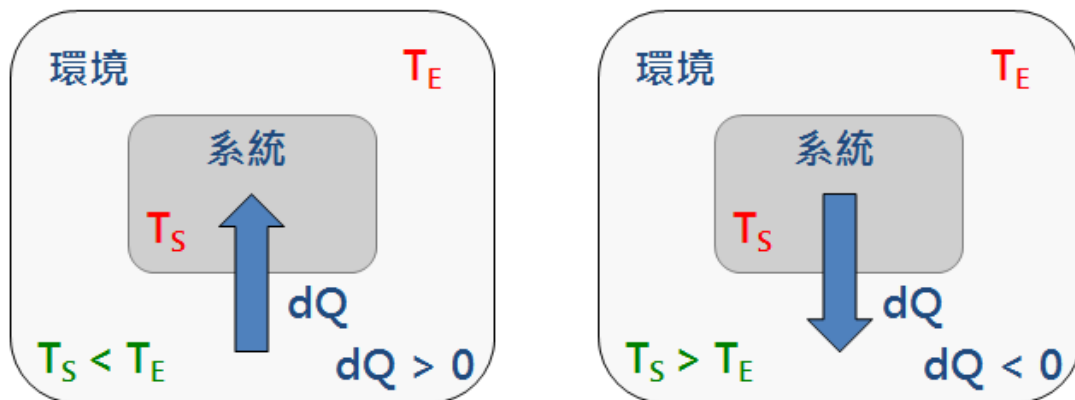
實驗儀器：

氣體定律儀，低壓感應器，類比感應裝置，透明塑膠管

實驗原理：

A. 系統吸熱與放熱

在本實驗中，系統指的就是氣體，當環境溫度 T_E 大於系統溫度 T_S 時，系統會由外界吸熱，定義系統吸收的熱量 dQ 為正。反之，當環境溫度 T_E 小於系統溫度 T_S 時，熱量由系統流向環境，視為放熱，故 dQ 為負值。如圖一所示。



圖一 環境與系統吸放熱示意圖。

B. 熱力學第一定律 $dE_{int} = dQ - dW = dQ - PdV$

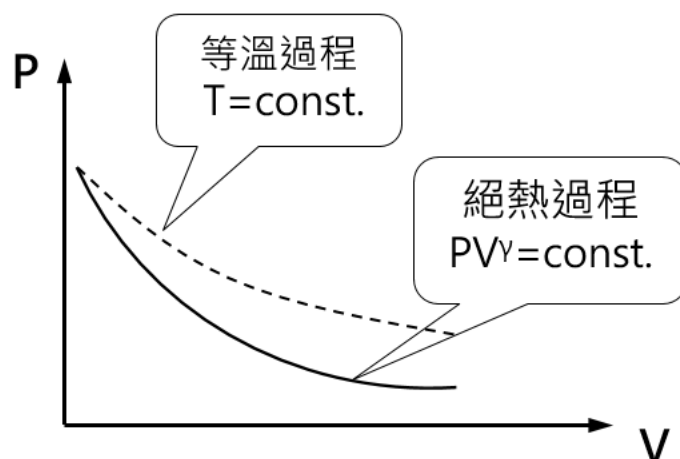
dE_{int} 表示系統內能， Q 為熱量， W 為系統對環境所作的功。對於理想氣體而言，氣體內能僅與溫度有關，即 $dE_{int} = dE_{int}(T)$ 。

C. 理想氣體的絕熱過程

當氣體被壓縮時，系統對環境作負功，即外界對氣體作正功。當環境作用在系統上的正功全部轉變為氣體的內能時，氣體溫度會升高；反之，當氣體膨脹時，氣體會對外界作功而消耗其內能，因此氣體的壓力和溫度將會同時降低。

D. 理想氣體的等溫過程

等溫過程，即系統內能不變($dQ = dW$)，由熱力學第一定律可知，當氣體被壓縮時，外界對氣體作正功，且氣體的溫度須維持不變的狀態下，系統必須要放熱($dQ < 0$)，用以維持系統內能恆定；反之，當氣體膨脹時，氣體對環境作功，為使系統內能維持不變，系統必須要吸熱($dQ > 0$)。



圖二 氣體壓力與氣體體積關係圖。

由熱力學第一定律可知，在絕熱過程中，氣體壓力 P 與氣體體積 V 關係圖的變化率較等溫過程為大(如圖二所示)，即絕熱過程的曲線較為陡峭。

承上，理想氣體的熱量 dQ 與氣體內能變化 dE_{int} 以及氣體對外界所作的功 PdV 之間關係如下所示

$$dQ = dE_{int} + PdV \quad (1)$$

E. 莫耳熱容量

氣體熱容量定義為氣體溫度升高一度所需的熱量。當氣體體積不變時，一莫耳氣體溫度升高一度所需的熱量，稱為定容莫耳熱容量，以 C_v 表示。由公式(1)可得

$$C_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_v = \left(\frac{\partial E_{int}}{\partial T} \right)_v = \frac{dE_{int}}{dT}$$
$$\Rightarrow C_v dT = dE_{int} \quad (2)$$

將公式(2)代回公式(1)整理後可得

$$dQ = C_v dT + PdV \quad (3)$$

理想氣體方程式可表示為 $PV = nRT$ 。當 $n=1$ 時，將兩邊同時為微分後可得

$$PdV + VdP = RdT \quad (4)$$

將公式(3)代入公式(4)整理後可得

$$\begin{aligned} dQ &= C_V dT + RdT - VdP \\ &= (C_V + R)dT - VdP \end{aligned} \quad (5)$$

已知，當氣體壓力固定時，一莫耳氣體溫度升高一度所需的熱量，稱為定壓莫耳熱容量，以 C_p 表示。代入公式(5)整理後可得，即 $dP = 0$ 。

$$\begin{aligned} dQ &= (C_V + R)dT \\ C_p &= \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = C_V + R \end{aligned} \quad (6)$$

F. 熱容比 γ

熱容比 γ 定義為定壓莫耳熱容量 C_p 和定容莫耳熱容量 C_V 的比值，即

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V}$$

在古典統計力學中，能量儲存的方式稱為自由度，每一個自由度相當於每莫耳分子儲存 $\frac{1}{2}RT$ 的能量。而空氣屬於雙原子分子，共有 5 個自由度(包含 3 個移動自由度與 2 個轉動自由度)，故每莫耳空氣分子所儲存的能量為 $\frac{5}{2}RT$ 。

承上，可推得空氣分子定容莫耳熱容量 $C_V = \frac{5}{2}R$ ，代入公式(6)即可推得定壓莫耳熱容量 $C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$ 。空氣分子熱容比 γ 如下表示

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R + R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.40$$

G. 絕熱氣體方程式

如前所述，因空氣為熱的不良導體，當空氣被快速壓縮或膨脹時，各部分的氣體來不及進行熱交換，此時無熱量流進或流出系統，可視為絕熱過程。

在絕熱過程中，可將熱量變化量視為零($dQ=0$)，由熱力學第一定律可知

$$dE_{int} = -dW = -PdV \quad (7)$$

將公式(7)代回公式(2)整理後可得

$$C_v dT + PdV = 0 \quad (8)$$

由理想氣體方程式($n=1$)可得

$$PV = RT \Rightarrow P = \frac{RT}{V} \quad (9)$$

將公式(9)代回公式(8)整理後可得

$$\begin{aligned} C_v dT + \frac{RT}{V} dV &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

再將公式(10)積分後可得

$$\begin{aligned} \ln T + \ln V^{R/C_v} &= \text{const.} \\ \Rightarrow TV^{R/C_v} &= \text{const.} \end{aligned} \quad (11)$$

由理想氣體方程式($n=1$)可得

$$PV = RT \Rightarrow T = \frac{P}{R}V \quad (12)$$

將公式(12)代回公式(11)可得

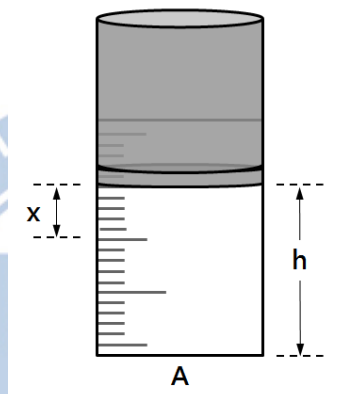
$$\begin{aligned} \frac{P}{R}V \cdot V^{R/C_v} &= \text{const.} \\ \Rightarrow PV \cdot V^{R/C_v} &= PV^{R+C_v/C_v} = \text{const.} \end{aligned}$$

將上述各條件代入整理後可得

$$\begin{aligned}
 PV^{C_p/C_v} &= \text{const.} \\
 \Rightarrow PV^\gamma &= \text{const.}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

如圖三所示，施以適當力道迅速拍打活塞一下後，活塞將會向下移動一小段位移 x 。此時，空氣柱內的氣體會施於以反作用力推動活塞，而空氣柱內的氣體壓力將會隨時間振盪。

在此過程中並無熱量自外界進入或流出，故可將整個過程視為絕熱過程，即滿足絕熱過程氣體方程式 $PV^\gamma = \text{const.}$ 。



圖三 空氣柱示意圖。

本實驗是以 Ruchhardt 實驗方法測得空氣熱容比 γ ，其推導過程如下所示。將公式(13)作微分運算後可得

$$\begin{aligned}
 V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1} dV &= 0 \\
 \Rightarrow dP &= -\frac{\gamma P}{V} dV
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

又知 $dV = xA$ ，代入公式(14)可得

$$dP = -\frac{\gamma P}{V} xA = -\frac{\gamma PAx}{V}$$

活塞所受到的淨力 F ，可表示為

$$\begin{aligned}
 F &= (dP)A \\
 &= \left(-\frac{\gamma PAx}{V}\right)A = -\left(\frac{\gamma PA^2}{V}\right)x
 \end{aligned}$$

如上所述，當活塞所受淨力 F 作用使其產生上下振盪，此上下振盪的過程滿足簡諧振盪，而簡諧振盪通式可表示為 $F = -kx$ ，則

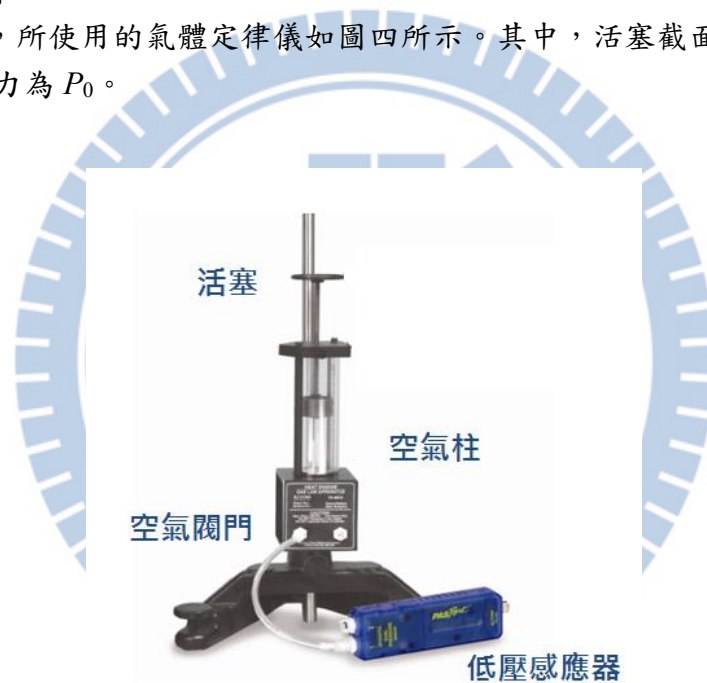
$$k = \frac{\gamma PA^2}{V}$$

活塞振盪週期 T 可表示為 (其中， m 為活塞質量)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma PA^2}} \quad (15)$$

H. 空氣熱容比 γ

在本實驗中，所使用的氣體定律儀如圖四所示。其中，活塞截面積為 A 、活塞質量為 m 與大氣壓力為 P_0 。



圖四 氣體定律儀。

- (a) 將活塞拉到適當高度 h (活塞下緣對應空氣柱刻度值) 後，關閉未與壓力感應器連接之閥門。
- (b) 內部氣體所受到的總壓力 P 包含大氣壓力 P_0 與活塞壓力，即

$$P = P_0 + \frac{mg}{A}$$

(c) 內部氣體總體積 V 包含空氣柱體積 Ah 與氣體定律儀下方塑膠管總體積 v' 。

$$V = Ah + v' \quad (16)$$

(d) 由公式(15)與(16)可得，空氣柱高度 h 與振盪週期平方 T^2 的關係式，如下所示

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mV}{\gamma PA^2}} \\ \Rightarrow V &= \frac{\gamma A^2 PT^2}{4\pi^2 m} = Ah + v' \\ \Rightarrow \left(\frac{\gamma AP}{4\pi^2 m}\right)T^2 &= h + \frac{v'}{A} \end{aligned} \quad (17)$$

(e) 承上，作振盪週期平方(T^2)與活塞高度(h)關係圖時，即可由關係圖斜率 (*slope*)計算空氣熱容比 γ

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m}{AP(\text{slope})}$$

注意事項：

1. 為防止儀器損壞，實驗進行時，應以一手緊握氣體定律儀，再以另一手適當力道拍打活塞。
2. 關閉閥門後應注意活塞是否向下滑落，倘若活塞仍會向下滑落，其主要原因為未與低壓感應器連接之閥門未完全關閉。

實驗步驟：

1. 先將氣體定律儀底部二個閥門皆打開，再將活塞拉至指定高度後，關閉未與低壓感應器連接閥門(下壓至底)。
2. 啟動軟體開始擷取數據，再以適當力道迅速拍打活塞一下。
3. 觀察『壓力-時間』關係圖，待活塞振盪週期變化關係圖趨於穩定後，再停止擷取數據。
4. 記錄活塞振盪 5 個週期總時間，再計算振盪週期 T 。
5. 改變空氣柱高度，重覆上述步驟。
6. 作 $T^2 - h$ 關係圖，再由線性迴歸線取得關係圖斜率 *slope*。
7. 計算空氣熱容比 γ ，再計算百分誤差。

實驗問題：

1. 若將實驗氣體改成氦氣，則 $T^2 - h$ 關係圖中的斜率會如何變化？試說明之。
2. 空氣主要的成分為何？在本實驗中，假設空氣為雙原子分子目的為何？試說明之。

