

實驗八 複擺實驗

實驗目的：

探討複擺(又稱卡特擺)的特性，藉以求重力加速度 g 值。

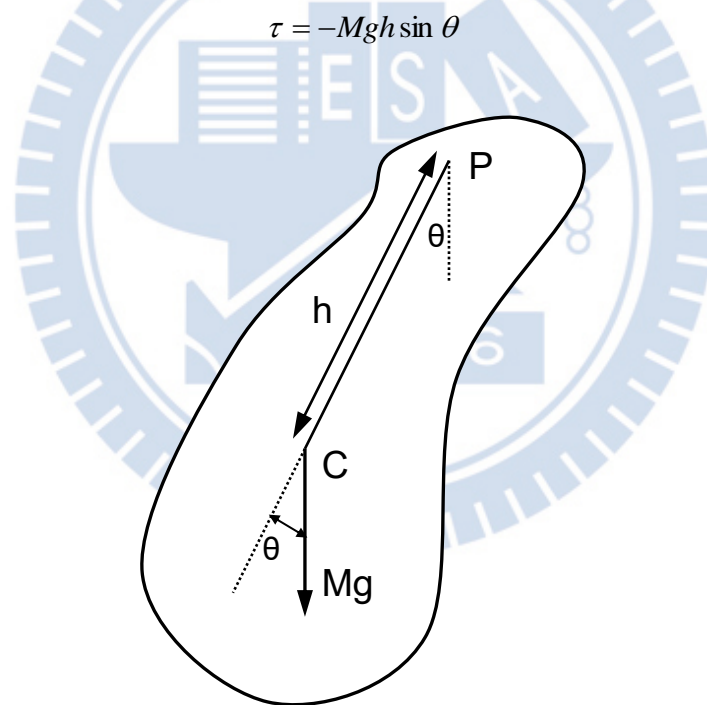
實驗儀器：

長條形複擺，複擺支架，光電閘(含連接線)，數位感應裝置，光電閘支架，水平儀

實驗原理：

將質量分佈不集中或不規則之物體，吊起來擺動稱為複擺，如圖一所示。其中，複擺質量為 M ，支點為 P ，質心位置為 C 且質心至支點 P 的距離為 h 。

當複擺作小角度的擺動時，其回復轉矩 τ 可表示為



圖一 複擺示意圖。

若擺動角度甚小 ($\sin \theta \approx \theta$)，則回復轉矩 τ 可簡化為

$$\tau = -Mgh \sin \theta \approx -Mgh\theta$$

承上，複擺運動方程式可表示為

$$\begin{aligned}\tau &= I\alpha = I\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{\tau}{I} = -\frac{Mgh\theta}{I} \\ \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgh}{I}\theta &= 0\end{aligned}$$

其中， I 為轉動慣量， α 為角加速度。

在此，可將複擺擺動情形，視為簡諧運動 (S.H.M.)，則

$$\omega^2 = \frac{Mgh}{I}$$

其中， ω 為角頻率。

綜合上述，複擺擺動週期 T 可表示為

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad (1)$$

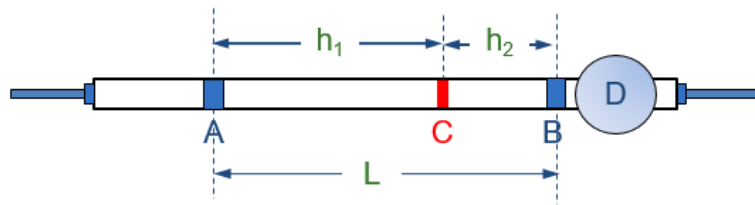
依據平行軸定理，可將轉動慣量 I 改寫為 $I = I_{cm} + Mh^2$ ，再代入公式(1)，即可得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + Mh^2}{Mgh}} \quad (2)$$

其中， I_{cm} 為複擺質心轉動慣量。

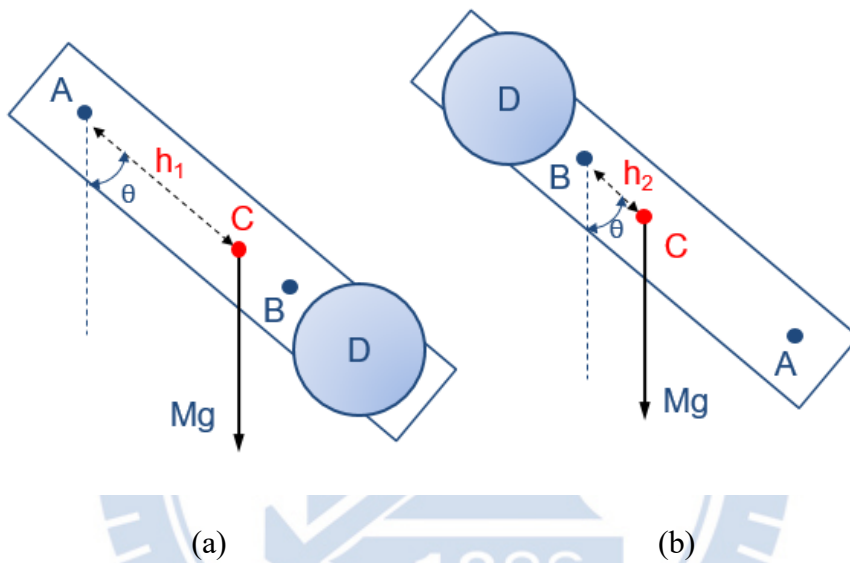
圖二為複擺構造示意圖。A、B 為支點且兩支點間距離為 L ，C 為質心位置，D 為可移動擺錘， h_1 為支點 A 到質心 C 距離， h_2 為支點 B 到質心 C 距離。

[註] 當擺錘 D 位置固定時，即表示質心 C 位置固定；當擺錘 D 位置改變時，即表示質心 C 位置也隨之改變。



圖二 複擺構造示意圖。

圖三為複擺實驗裝置示意圖。將擺錘 D 位置固定(即表示質心 C 位置固定)，再分別以 A、B 為支點擺動，藉由複擺的特性，即可帶入公式求取出重力加速度 g 值。



圖三 複擺實驗裝置示意圖。

圖三(a)為複擺以 A 為支點擺動，再由公式(2)可將週期 T_A 可表示為

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{Mgh_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + Mh_1^2}{Mgh_1}} \quad (3)$$

其中， I_A 為複擺以 A 為支點時的轉動慣量。

圖三(b)為複擺以 B 為支點擺動，再由公式(2)可將週期 T_B 可表示為

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{I_B}{Mgh_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + Mh_2^2}{Mgh_2}} \quad (4)$$

其中， I_B 為複擺以 B 為支點時的轉動慣量。

在此可由平行軸定理($I = I_{cm} + Mh^2$)，得知 I_A 、 I_B 與質心轉動慣量 I_{cm} 間的關係。再由公式(3)與公式(4)即可求得重力加速度 g 值，如下所示

$$g = \frac{4\pi^2(h_1^2 - h_2^2)}{(h_1 T_A^2 - h_2 T_B^2)} \quad (5)$$

若 $T_A = T_B = T$ 時，代入公式(5)即可得重力加速度 g 值簡化為

$$g = \frac{4\pi^2(h_1 + h_2)}{T^2} = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

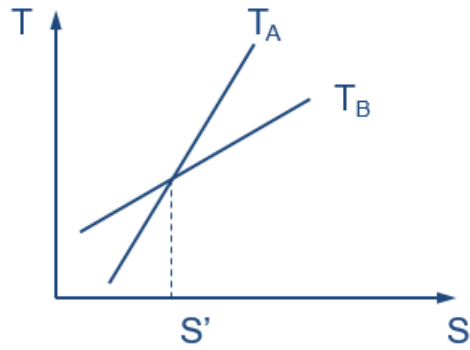
其中， $h_1 + h_2 = h$ 即二支點間距離。

注意事項：

1. 實驗進行前，應確認長條形複擺支點與擺架凹槽是否確實咬合。
2. 長條形複擺若於擺動時會晃動，請暫停實驗並重新調整複擺支架下方螺絲，再次修正支架水平。
3. 嚴禁揮舞複擺，轉動或移動複擺時務必小心，切勿單手為之。
4. 每次實驗前應調整光電閘高低位置，使複擺於擺動時會通過光電閘。

實驗步驟：

1. 依軟體操作說明書設定相關參數。
2. 測量並記錄 A、B 兩支點距離 L 。
3. 固定擺錘 D，記錄擺錘 D 所對應刻度尺位置 S_1 。
4. 分別測量複擺以 A、B 為支點時，擺動 60 秒之平均週期 T_A 、 T_B 。
5. 改變擺錘 D 位置($S_2 \sim S_5$)，重覆上述步驟。
6. 作 $T-S$ 關係圖，如圖四所示。
7. 作線性迴歸線，再由線性迴歸線方程式求交點位置 S' 。
8. 將擺錘 D 移至交點位置 S' ，再分別測量複擺以 A、B 為支點時，擺動 60 秒之平均週期 T_A 、 T_B 。
[註] 依據公式 T_A 、 T_B 應相同，但在實驗過程中會略有差異。若兩者間時間差小於 0.004 秒再記錄。若無，應微調擺錘 D 位置，重覆上述步驟，直到時間差小於 0.004 秒為止。
9. 取 T_A 、 T_B 平均值 T ，代入公式計算重力加速度 g 值。



圖四 $T-S$ 關係圖。

實驗問題：

1. 由推導過程可知，當 $h_1 = h_2$ 即可滿足 $T_A = T_B = T$ 。試問在實驗過程中，是否可行？試說明之。
2. 假若擺錘 D 可移動的範圍增大，所繪得的 $T-S$ 關係圖是否仍呈線性？若否，可由理論推測嗎？試說明之。

