實驗五　RLC 串聯電路 I

實驗目的：

以直流電訊號驅動 RLC 串聯電路，藉以了解阻尼振盪現象與特徵頻率的關係。

實驗儀器：

示波器，訊號產生器，電阻器，電容器，電感器

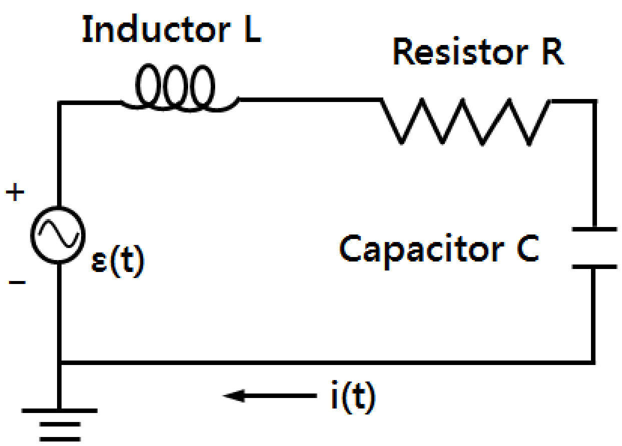
實驗原理：

電子元件中，電阻並無法儲存能量，屬於能量消耗元件；電容 C 與電感 L 皆不會消耗能量屬於能量儲存元件。在 LC 串聯電路中並無串接電阻 R，故能量消耗為零，為維持能量守恆，電路所儲存的能量會於電容 C 與電感 L 內進行交換，而此交換的頻率稱為特徵頻率。特徵頻率可藉由測量電容中電壓對時間的關係，或電感中磁場對時間的關係取得。若在 LC 串聯電路中再串接電阻 R 就成為 RLC 串聯電路，電阻 R 在電路中所扮演的角色就是阻尼，其作用即為消耗能量。

欲測量 LC 或 RLC 串聯電路中的特徵頻率，最簡單的方式就是於電路中再串接驅動源(例：訊號產生器)。訊號產生器的作用為驅動電路內的電子移動，其驅動方式可分為直流與交流驅動，而交流驅動頻率會與電路內的特徵頻率相互影響。

圖一為 RLC 串聯電路示意圖，完整的 RLC 串聯電路是由訊號產生器、電阻 R、電容 C 和電感 L 及電壓測量儀所組成，最常使用的電壓測量儀器即為示波器。

以電動勢 $\varepsilon(t)$來驅動 RLC 電路時，各元件其電壓與相位均會隨時間增加而改變。



圖一　RLC 串聯電路示意圖。

由克希荷夫定律(Kirchhoff law)可知『任一封閉迴路的總電壓降為零』，則

$$V_R(t)+V_L(t)+V_C(t)=\varepsilon(t) \tag{1}$$

其中，$\varepsilon(t)$為訊號產生器所提供的電動勢，$V_R(t)$、$V_L(t)$、$V_C(t)$分別為電阻 R、電感 L 與電容 C 三個元件的電壓。

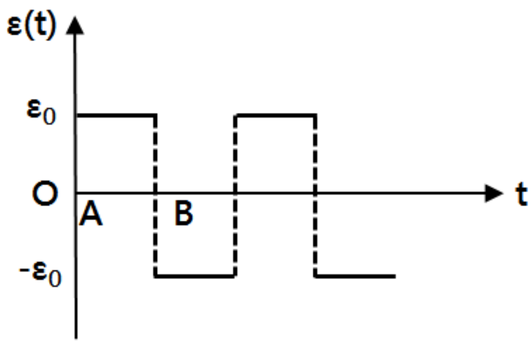
在 RLC 電路中，電阻 R、電感 L、電容 C 的特性皆可以電流$i(t)$方式表示：

1. 電容 C 特性：$C=\dfrac{Q(t)}{V_C(t)}$ & $i(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow i(t)=C\cdot\dfrac{dV_C(t)}{dt}$
2. 電阻 R 特性 (歐姆定律)：$R=\dfrac{V_R(t)}{i(t)} \Rightarrow V_R(t)=i(t)\cdot R=RC\cdot\dfrac{dV_C(t)}{dt}$
3. 電感 L 特性： $L=\dfrac{d\Phi(t)}{di(t)}$ & $V_L(t)=\dfrac{d\Phi(t)}{dt} \Rightarrow V_L(t)=L\cdot\dfrac{di(t)}{dt}=LC\cdot\dfrac{d^2V_C(t)}{dt^2}$

分別將電阻 R、電感 L、電容 C 的特性代入公式(1)，可得與電容電壓$V_C(t)$有關的二次微分方程式，如下表示：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dV_C(t)}{dt}+\frac{1}{LC}V_C(t)=\frac{1}{LC}\varepsilon(t) \tag{2}$$

在本實驗是以訊號產生器提供電動勢為$\varepsilon(t)$的直流(方波)訊號，其電動勢$\varepsilon(t)$隨時間變化的關係圖，如圖二所示。



圖二 $\varepsilon(t)$對時間 t 變化關係圖 <方波>。

假設 $\varepsilon(t)$為低頻方波，則此電路會受到兩個過程所作用。

1. 在 A 點電動勢由$-\varepsilon_0$變成ε_0：相當於電動勢對電容充電直到電容充滿電荷。
2. 在 B 點電動勢由ε_0變成$-\varepsilon_0$：相當於電路短路，即電容放電後會再反向充電直到電容充滿電荷。

A.　充電過程：

將電動勢 $\varepsilon(t)=\varepsilon_0$ 代入公式(2)，可得二次微分方程式如下所示：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{dV_C(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\cdot V_C(t)=\frac{\varepsilon_0}{LC} \tag{3}$$

如圖二所示，充電過程的起始電壓 $V_C(t=0)=-\varepsilon_0$，則此二次微分方程式所解得的電容電壓 $V_C(t)$ 如下所示：

$$\begin{aligned} V_C(t)&=\varepsilon_0\left(1-2\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2}e^{-\beta t}\cos(\omega t-\phi)\right)\\ \Rightarrow V_C(t)&=\varepsilon_0-2\varepsilon_0\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2}e^{-\beta t}\cos(\omega t-\phi)\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$\beta=\dfrac{R}{2L}$　　角頻率 $\omega=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$　　相位差 $\phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\omega}\right)$

振幅項 $\left|V_C(t)\right|=2\varepsilon_0\sqrt{1+\left(\dfrac{\beta}{\omega}\right)^2}e^{-\beta t}$

振盪項 $\cos(\omega t-\phi)$

B.　反向充電過程：

將電動勢 $\varepsilon(t)=-\varepsilon_0$ 代入公式(2)，可得二次微分方程式如下所示：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dV_C(t)}{dt}+\frac{1}{LC}V_C(t)=-\frac{\varepsilon_0}{LC}$$

如圖二所示，充電過程的起始電壓 $V_c(t=0)=\varepsilon_0$，則此二次微分方程式所解得的電容電壓 $V_C(t)$ 如下所示：

$$V_C(t)=2\varepsilon_0\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2}e^{-\beta t}\cos(\omega t-\phi)-\varepsilon_0 \tag{5}$$

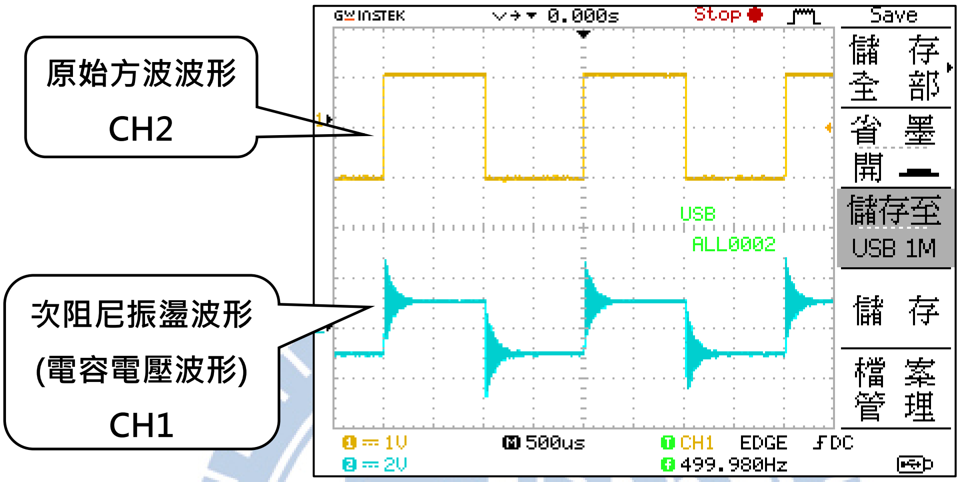
其中

$\beta=\dfrac{R}{2L}$　　角頻率 $\omega=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$　　相位差 $\phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\omega}\right)$

振幅項 $\left|V_C(t)\right| = 2\varepsilon_0\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2}\,e^{-\beta t}$

振盪項 $\cos(\omega t - \phi)$

將公式(4)與公式(5)分別對時間作圖，即可得電容電壓振盪波形，稱為阻尼振盪。圖三為示波器上所顯示原始方波(CH2)與次阻尼振盪波形(CH1)。



圖三　示波器顯示波形示意圖。

在公式(4)與公式(5)中，計算所得的振幅項均有 $e^{-\beta t}$ 指數函數(衰減因子)且振盪項均有 $cos(\omega t)$，代表在振盪的過程中電容電壓振幅會受到指數函數影響而衰減，此與力學中彈簧阻尼振盪的行為類似。

[註] $\beta = \frac{R}{2L}$ 且 $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$

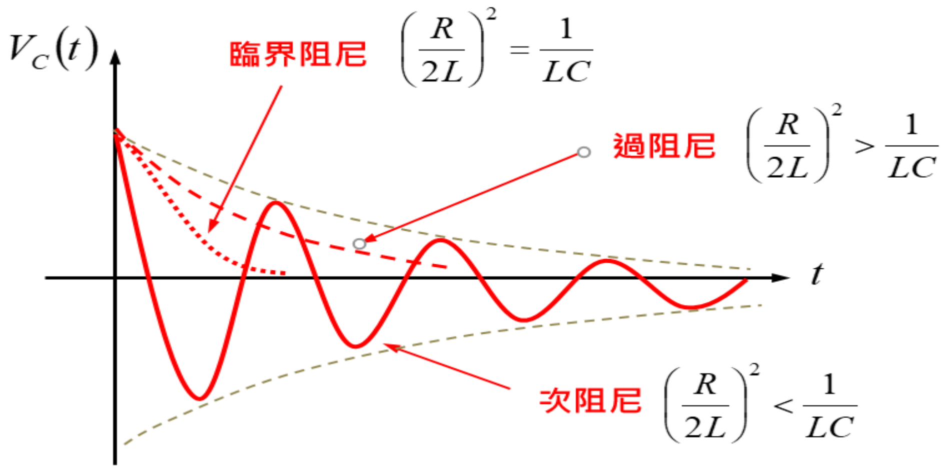
承上，β 值及角頻率 ω 均與 RLC 電路中的電阻 R、電感 L、電容 C 有關，即當 RLC 串聯電路中各元件數值大小不同時，其所產生的振盪形式亦會有所不同，如下所示：
[註] 圖四為下述各條件下電容電壓對時間關係圖(阻尼振盪)

1. 當 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$，則 $\omega = 0$，無振盪產生，電容電壓會隨時間增加而以指數函數變小，稱為「**臨界阻尼 (Critical Damping)**」。

2. 當 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$，則 ω 為虛數，故 $\cos(\omega t) = \cosh(j\omega t)$ 可視為 Hyperbolic Cosine 函數，亦無振盪產生，稱為「**過阻尼 (Over Damping)**」。電容電壓將以阻尼方式振盪。

3. 當$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$，則$\omega$為實數，電容電壓將以阻尼方式振盪，其振幅隨時間增加而遞減，稱為「**次阻尼 (Under Damping)**」。

在此條件中，若$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 << \frac{1}{LC}$，電路振盪頻率$\omega \approx \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$，稱為**自然頻率**。

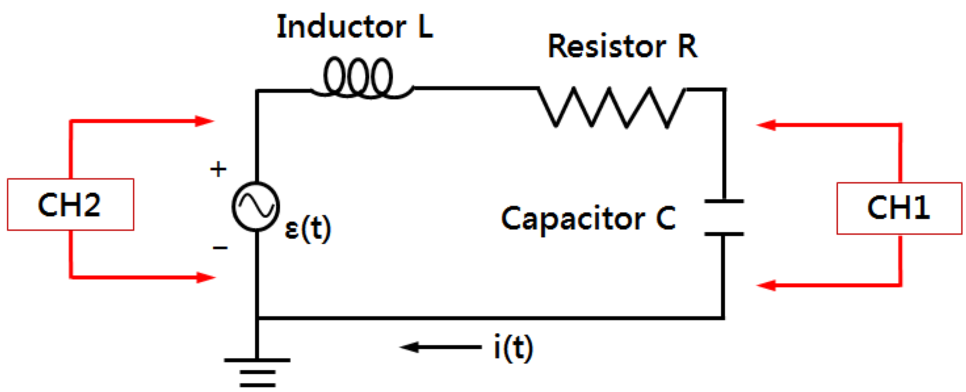


圖四　電容電壓對時間關係圖。

注意事項：

1. 打開儀器電源前，請先檢查電路是否正確或短路。
2. 確認電阻器、電容器與電感器開關皆在 **OUT** 位置。

實驗步驟：(以 CH1 讀取電容電壓訊號；以 CH2 讀取原始方波訊號)



圖五　RLC 串聯電路實驗架設圖(阻尼振盪) 。

A. 次阻尼振盪 I-電容電壓振幅與時間關係

1. 實驗裝置如圖五所示。
2. 設定電阻 $R = 800\ \Omega$、電感 $L = 10$ mH 與電容 $C = 100$ pF。
3. 將上述條件代入公式計算 β 計算值。
4. 開啟訊號產生器，設定輸出波形為 500.0 Hz 且電壓振幅 $\varepsilon_0\,(=V_{max})$ 為 1.00V 方波。
   [註] 即 CH2 峰對峰訊號 $V_{P-P} = 2.00$ V。
5. 調整「電壓/格 VOLT/DIV」與「時間/格 TIME/DIV」旋鈕，使螢幕上大約可看到 2-3 個週期的方波(CH2)與次阻尼振盪波形(CH1)。
   [註] 若無次阻尼振盪波形，請檢查線路或儀器各項設定是否有誤。
6. 再次調整「電壓/格 VOLT/DIV」與「時間/格 TIME/DIV」旋鈕，使螢幕顯示一個完整次阻尼振盪波形，再利用游標夾擊法記錄各峰值電容電壓 $V_C(t)$ 與時間 t。
7. 作 $\left|V_C(t)\right| - t$ 關係圖，再以指數迴歸分析，計算 β 測量值及其誤差。

B. 次阻尼振盪 II-角頻率與電容關係

1. 設定電阻 $R = 100\ \Omega$、電感 $L = 10$ mH，再於電容器 0.002 μF 至 0.04 μF 區間內選取 7 個不同電容 C。
2. 承如步驟 A，再次觀察次阻尼振盪波形。
3. 計算不同電容 C 所產生的次阻尼振盪角頻率 ω 計算值。
4. 以游標夾擊法記錄不同電容 C 下所產生的次阻尼振盪週期 T 測量值，再由公式計算角頻率 ω 測量值。
5. 作 $\omega^2 - \dfrac{1}{C}$ 關係圖，再以線性迴歸分析，計算 $\dfrac{1}{L}$ 測量值及其誤差。

C. 阻尼振盪觀察

1. 固定電感 L 與電容 C，僅調整電阻 R，觀察次阻尼、臨界阻尼與過阻尼振盪現象。

<u>實驗問題</u>：

1. 當訊號產生器接上 RLC 串聯電路後，示波器所顯示方波並不完美，為何會有這種現象產生？試說明之。
2. 在電感 L = 10 mH、電容 C = 0.01 μF 及電感 L = 10 mH、電容 C = 100 pF 兩種條件下，若要於示波器看到阻尼振盪訊號，電阻 R 應如何設定？試說明之。
3. 阻尼振盪在生活中有那些應用？試說明之。