

一維運動

實驗目的：

藉重力拉扯軌道上的滑車，分別觀測滑車的水平與爬坡滑動，驗證牛頓運動定律。

實驗儀器：

鋁製軌道，滑車，水平儀，軌道斜面支架，掛鉤，砝碼，細線，直尺，電子秤(公用)，含滑輪之光閘(含連接線) photogate with pulley，數位轉接/介面盒 Digital Adapter/Passport Interface，電腦(含Capstone 程式軟體)。

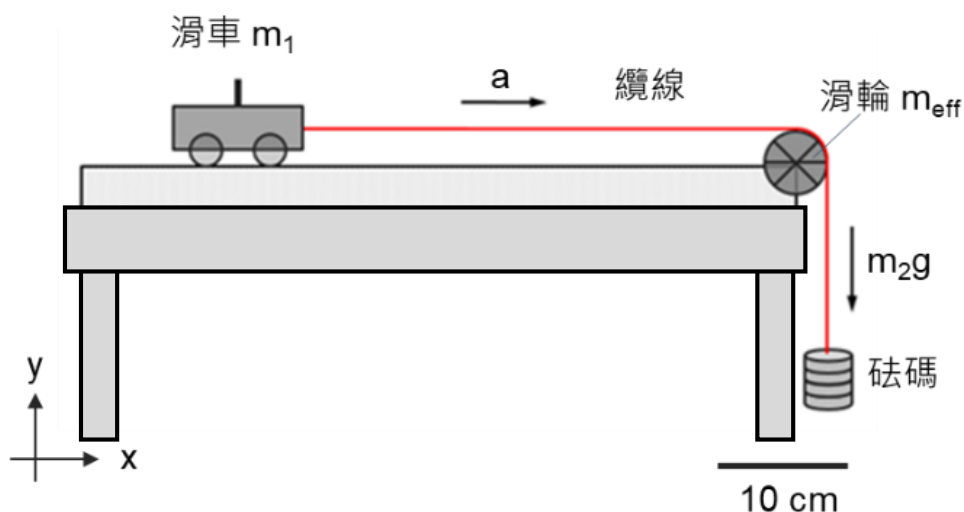
實驗原理：

牛頓第二運動定律定義運動中的物體所受到的淨力等於物體質量與加速度的乘積。其受力方程式可表示為

$$\vec{F} = M\vec{a} \quad (1)$$

(1)式中， \vec{F} 是作用於物體上所有力的向量和，具有量值與方向性。 M 為物體的質量，只有量值沒有方向性。 \vec{a} 為物體的加速度，具有量值與方向性。

圖一為牛頓運動定律實驗裝置示意圖，滑車與砝碼用纜線連接在一起，纜線掛在滑輪上，重力會拉動砝碼往 $-y$ 方向下墜並帶動滑車往 x 方向前進。



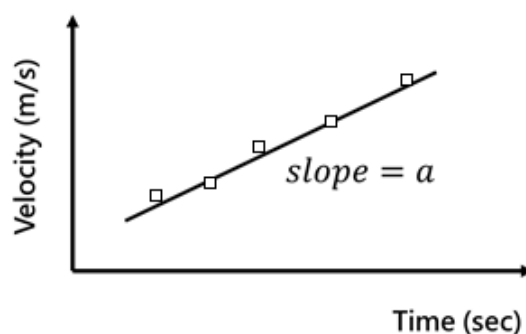
圖一 牛頓運動定律實驗裝置示意圖。圖中 m_1 為滑車與滑車上砝碼總質量， m_2 為砝碼與掛鉤的總質量， a 是滑車滑行與砝碼下墜的加速度， g 是重力加速度， m_{eff} 定義為滑輪轉動的等效質量。

圖一中， m_1 為滑車與滑車上砝碼總質量， m_2 為砝碼與掛鉤的總質量。另滑輪轉動須提供其轉動動能(見物理 I 轉動章節)，就能量觀點，懸掛砝碼與掛鉤(m_2)的下落提供重力位能，轉換成滑車與滑車上砝碼(m_1)與懸掛砝碼與掛鉤(m_2)的線性動能，以及滑輪的轉動動能，當然還有少量因摩擦消耗的能量；滑輪的轉動動能決定於其轉動慣量 I 與角速率 ω ， $K_{rotation} = \frac{1}{2}I\omega^2$ ，通常可寫成 $\frac{1}{2}\beta m_r v^2$ ， β 決定於轉動物的質量 (m_r) 分布，為無單位係數；因此我們定義滑輪轉動的等效質量為 m_{eff} ，其能量變化導致對系統的力為 m_{eff} 乘上加速度 $-\vec{a}$ 。對我們的實驗系統而言， m_{eff} 是 4.50 g，就好像系統裡多出 4.50g 的質量一樣。

當 m_1 受到 m_2g 作用而作等加速度運動時，公式(1)可改寫為

$$\begin{aligned} F &= Ma \\ \Rightarrow m_2g - m_{eff}a &= (m_1 + m_2)a \\ \Rightarrow m_2g &= (m_1 + m_2 + m_{eff})a \end{aligned}$$

實驗裝置的軟體會自動測量滑輪的轉速，換算成滑車滑動的位移與速度，顯示出速度隨時間的變化(如圖二所示)，用線性回歸算出直線的斜率，此斜率就是系統加速度 a 。



圖二 速度與時間關係圖

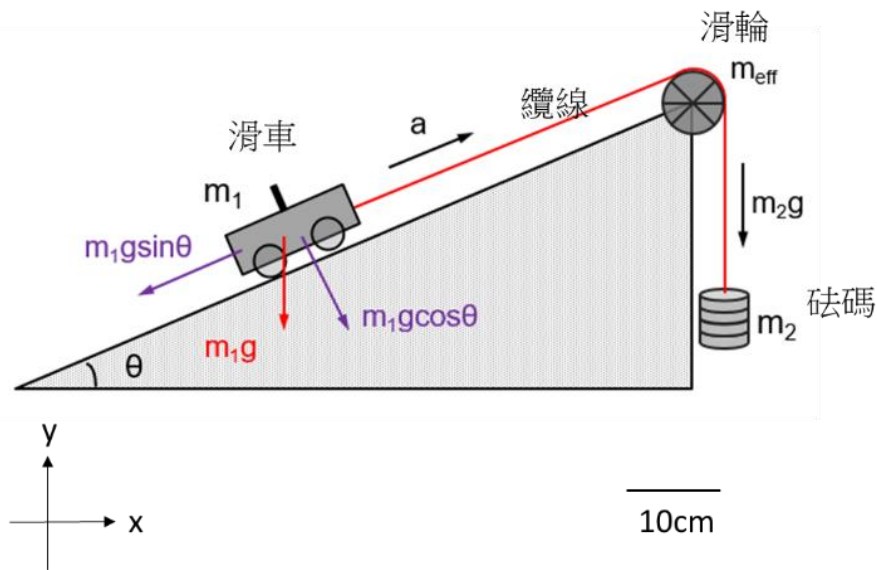
圖三為滑車爬坡裝置示意圖(又稱阿特午機 Atwood machine)。滑車與砝碼用纜線連接在一起，纜線掛在滑輪上。 m_2 往 $-y$ 方向下墜並帶動滑車在坡上爬升。 m_1 為滑車與滑車上方砝碼總質量， m_2 為掛鉤與鉤上砝碼總質量，同上，我們定義滑輪轉動的等效質量為 m_{eff} ，滑輪轉動對系統產生的淨力為 m_{eff} 乘上加速度 $-\vec{a}$ 。

由牛頓第二運動定律可知，力與加速度的關係如下

$$\begin{aligned} F &= Ma \\ m_2g - m_1g \sin \theta - m_{eff}a &= (m_1 + m_2)a \end{aligned}$$

因此，系統加速度 a 可表示為

$$a = \frac{m_2g - m_1g \sin \theta}{m_1 + m_2 + m_{eff}}$$



圖三 滑車爬坡實驗裝置示意圖。圖中 m_1 為滑車與滑車上砝碼總質量， m_2 為砝碼與掛鈎的總質量， a 是滑車滑行與砝碼下墜的加速度， g 是重力加速度。 θ 是軌道傾斜角度， m_{eff} 定義為滑輪轉動的等效質量。

當 $\theta < 10^\circ$ 時， $\sin \theta (\text{deg}) \approx \theta (\text{rad})$ ，系統加速度 a 可改寫成

$$a \approx \frac{m_2 g - m_1 g \theta}{m_1 + m_2 + m_{\text{eff}}}$$

此時若 $m_1 \gg m_2$ 且 $m_1 \gg m_{\text{eff}}$ 時，系統加速度 a 可再簡化為

$$a \approx \frac{m_2 g}{m_1} - g \theta$$

調整軌道的傾斜角度等同於調整滑車受到的拉力，實驗中可以觀察到拉力改變如何影響滑車爬升的加速度。

注意事項：

1. 實驗進行前務必將軌道調整為水平狀態並鎖緊螺絲。
2. 滑輪結構脆弱，且掛勾很纖細，因此掛勾上砝碼總重不要超過 100g，以免拉力過大造成細繩斷裂或滑車脫軌。

實驗步驟：

► 水平滑動實驗：

實驗前校正

1. 將水平儀置於軌道上方，調整軌道下方螺絲使軌道水平。
2. 將滑車置於軌道上方，觀察滑車是否會順著軌道溜走。如果會，請再次調整軌道水平，直到滑車靜止不動。
3. 取適當長度細線，將細線一端先繫於黑色 O-ring 後再套於滑車上方固定柱，另一端繫於掛鈎扣環。
4. 將細線跨過滑輪搭在上面，調整滑輪高低位置使細線與軌道面平行。

A. F 固定不變，改變 M ，觀察 a 如何隨著 M 改變

1. 以電子秤測量掛鈎與掛鈎上砝碼總質量 m_2 。
2. 以電子秤測量滑車與滑車上砝碼總質量 m_1 。
3. 計算系統總質量 $M = m_1 + m_2 + m_{\text{eff}}$ 。
4. 依軟體操作說明書設定相關參數與關係圖。
5. 將滑車置於軌道上方並以手輕壓滑車。啟動軟體開始擷取數據後釋放滑車，由軟體取得系統加速度 a ，以 $a = \bar{a} \pm \sigma_a$ 表示。
6. 固定系統作用力 F ，改變系統總質量 M ，重覆上述步驟。
7. 作 $\frac{1}{a}$ vs. M 關係圖， $\frac{1}{a}$ 為應變數在 y 軸， M 為自變數在 x 軸，與期望結果作比較。

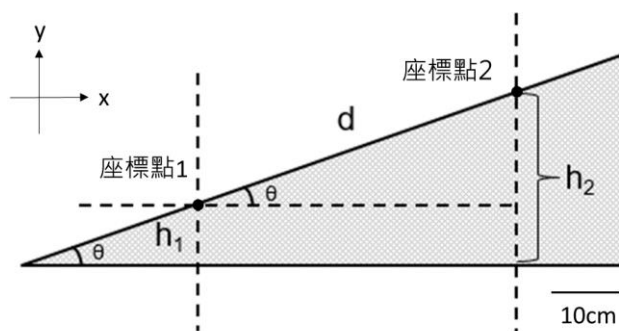
B. F 改變，固定 M ，觀察 a 如何隨著 F 改變

1. 以電子秤測量掛鈎與掛鈎上砝碼總質量 m_2 。
2. 以電子秤測量滑車與滑車上砝碼總質量 m_1 。
3. 計算系統總質量 $M = m_1 + m_2 + m_{\text{eff}}$ 。
4. 將滑車置於軌道上方並以手輕壓滑車。啟動軟體開始擷取數據後釋放滑車，由軟體取得系統加速度 a ，以 $a = \bar{a} \pm \sigma_a$ 表示。
5. 將掛鈎上砝碼或滑車上砝碼以不改變總質量 M 的原則下任意移動(即進退改變掛鈎與鈎上砝碼拉力 $F=m_2g$)，重覆上述步驟。
6. 作 a vs. F 關係圖， a 為應變數在 y 軸， F 為自變數在 x 軸，與期望結果作比較。

➤ 爬坡實驗：

實驗前校正

1. 將水平儀置於軌道上方，調整軌道下方螺絲使軌道水平。
2. 將軌道斜面支架固定於軌道其中一側，用以抬高軌道使其傾角為 θ ，改變傾角時，務必手扶著軌道再調整支架螺絲，改變軌道傾斜度後，鎖緊支架螺絲後再放手。
3. 以三角公式測量軌道傾角 θ 。如圖四所示， h_1 為座標點 1 高度， h_2 為座標點 2 高度， d 則為兩座標點間的距離，傾斜角 θ 可根據座標點高度差及兩點間距 d ，代入三角函數公式求得。
4. 取適當長度細線，細線一端先繫於黑色 O-ring 後再套於滑車上方固定柱，另一端繫於掛鈎扣環。
5. 將細線跨過滑輪搭在上面，調整滑輪高低位置使細線與軌道面平行。



$$\sin \theta = \frac{h_2 - h_1}{d}$$
$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{h_2 - h_1}{d} \right)$$

圖四 三角公式測量軌道傾角示意圖。 h_1 為座標點 1 高度， h_2 為座標點 2 高度， d 則為兩座標點間的距離， θ 為軌道傾斜角度。

C. 固定 M ，固定 F ，改變 θ ，觀察 a 如何隨著 θ 改變

1. 以電子秤測量掛鈎與掛鈎上砝碼總質量 m_2 。
2. 以電子秤測量滑車與滑車上砝碼總質量 m_1 。
3. 計算系統總質量 $M = m_1 + m_2 + m_{\text{eff}}$ 。
4. 以三角公式測量軌道傾角 θ 。
5. 依軟體操作說明書設定相關參數與關係圖。
6. 將滑車置於軌道上方並以手輕壓滑車。先啟動軟體開始擷取數據後釋放滑車，再由軟體取得系統加速度 a ，以 $a = \bar{a} \pm \sigma_a$ 表示。
7. 固定滑車(含滑車上砝碼)總質量 m_1 與掛鈎(含鈎上砝碼)總質量 m_2 ，改變軌道斜面傾角 θ ，重覆上述步驟 6。
8. 作表，將 θ 與拉力 F 的對應關係列出來。
9. 作 a vs. θ 關係圖， a 為應變數在 y 軸， θ 為自變數在 x 軸，與期望結果作比較。
10. 作 a vs. $\sin\theta$ 關係圖， a 在 y 軸， $\sin\theta$ 在 x 軸，與期望結果作比較。

討論提示：

1. 如何從 a vs. F 關係圖中(水平滑動 B)的擬合直線外插於 x 軸或 y 軸截距，判斷滑車在初始狀態發生了什麼事？
2. 如何從 $\frac{1}{a}$ vs. M 關係圖和 a vs. F 關係圖中(水平滑動) a 的走勢，推論滑車輪子和軌道間的靜摩擦力和動摩擦力是否存在？能不能估算出靜摩擦力和動摩擦力的數值？
3. 分析繩子與滑輪、滑輪與軸承之間有哪些摩擦力？試推導解釋為何這些摩擦力的總和正比於滑車的加速度。
4. 如何改進實驗裝置，減少摩擦力的影響？
5. 如果把實驗裝置搬到月球和火星上，實驗結果會如何變化？